

No.3 次元定理

この回のゴール

- 次元定理 $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ を述べ、証明できる.
- 次元定理を使って、核や像の次元を求めたり、単射・全射の可能性を判定したりできる.
- 「行列のランク = 1 次独立な列の最大本数 = 1 次独立な行の最大本数」を説明できる.
- 同型写像の意味を理解し、「 $V \cong W \iff \dim V = \dim W$ 」を説明できる.

以下, V, W を有限次元のベクトル空間, $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする.

1. 次元定理

No.2 の例題 1 で $\dim \operatorname{Ker} f_A + \dim \operatorname{Im} f_A = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ となった. これはいつでも成り立つ.

定理 1 次元定理

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

【証明】 $\dim V = n, \dim \operatorname{Ker} f = k$ とする. $\operatorname{Ker} f$ の基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ を, 第 4 章 No.3 定理 5 (3) で V の基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-k}$ に延長する. $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_{n-k})$ が $\operatorname{Im} f$ の基底であることを示せば, $\dim \operatorname{Im} f = n - k$ となって証明が終わる.

生成: No.2 定理 3 より $\operatorname{Im} f = \langle f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k), f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_{n-k}) \rangle$. $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ なので, $\operatorname{Im} f = \langle f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_{n-k}) \rangle$.

1 次独立: $c_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + c_{n-k} f(\mathbf{v}_{n-k}) = \mathbf{0}$ とする. $f(c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{n-k} \mathbf{v}_{n-k}) = \mathbf{0}$ なので $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{n-k} \mathbf{v}_{n-k} \in \operatorname{Ker} f$ で, $= d_1 \mathbf{u}_1 + \dots + d_k \mathbf{u}_k$ と書ける. 移項すると

$$d_1 \mathbf{u}_1 + \dots + d_k \mathbf{u}_k - c_1 \mathbf{v}_1 - \dots - c_{n-k} \mathbf{v}_{n-k} = \mathbf{0}.$$

これは V の基底の 1 次関係なので, 係数はすべて 0. 特に $c_1 = \dots = c_{n-k} = 0$. □

コラム: 次元定理のイメージ

V の n 個の「自由度」のうち, $\dim \operatorname{Ker} f$ 個は f によってつぶされて 0 になり, 残りの $\dim \operatorname{Im} f$ 個が生き残って像を作る. 自由度は増えも減りもせず, 「つぶれた分 + 残った分 = 元の分」という保存則になっている.

例 1

- (a) No.2 例題 2 の $D: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3: \dim \operatorname{Ker} D + \dim \operatorname{Im} D = 1 + 3 = 4 = \dim \mathbb{R}[x]_3$.
- (b) No.2 練習問題 4 の $T(X) = X - {}^t X: 3 + 1 = 4 = \dim M_{2,2}(\mathbb{R})$.

■ 2. 単射・全射と次元

定理 2

- (1) f が単射 $\iff \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
- (2) f が全射 $\iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W$.
- (3) $\dim V > \dim W$ なら f は単射にならない. $\dim V < \dim W$ なら f は全射にならない.
- (4) $\dim V = \dim W$ なら, f が単射 $\iff f$ が全射 $\iff f$ が全単射.

【証明】(1) No.2 定理 2 より, 単射 $\iff \dim \operatorname{Ker} f = 0 \iff$ (次元定理) $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$. (2) $\operatorname{Im} f$ は W の部分空間なので, 第 4 章 No.4 定理 4 より $\operatorname{Im} f = W \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W$. (3) $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim W$ かつ $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$ (次元定理) なので, (1)(2) から従う. (4) $\dim V = \dim W$ なら (1) と (2) の右辺が同じ条件になる. $\square$

注意

(4) は**同じ次元の空間**どうしでしか使えない. たとえば正方行列 A について「 $Ax = \mathbf{0}$ の解が $\mathbf{0}$ だけ (単射) なら, どんな $\mathbf{b}$ に対しても $Ax = \mathbf{b}$ が解をもつ (全射)」という第 2 章 No.3 定理 5 の内容は, (4) の特別な場合である.

例題 1

$f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, $f(p) = p(x+1) - p(x)$ について, $\operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Im} f$ を求めよ.

【解答】 $p = a + bx + cx^2$ とすると

$$f(p) = (a + b(x+1) + c(x+1)^2) - (a + bx + cx^2) = (b+c) + 2cx.$$

$\operatorname{Ker} f: b+c=0$ かつ $2c=0$ より $b=c=0$. $\operatorname{Ker} f = \langle 1 \rangle$ (定数), 次元 1.

$\operatorname{Im} f$: 次元定理より $\dim \operatorname{Im} f = 3-1 = 2$. $f(p)$ はいつも 1 次以下なので $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}[x]_1$ で, $\dim \mathbb{R}[x]_1 = 2$ だから第 4 章 No.4 定理 4 より $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]_1$.

注意

例題 1 では, $\operatorname{Im} f$ を直接求めずに, **次元を数えて**「含まれていて, 次元が同じだから一致する」と結論している. 次元定理と第 4 章 No.4 定理 4 の組合せは, よく使う論法である.

■ 3. ランクの意味

$A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ を $m \times n$ 行列とし, $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を考える.

定理 3 列から見たランク

$\text{rank } A = \dim \text{Im } f_A = \dim \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$. つまり, $\text{rank } A$ は A の列ベクトルのうち 1 次独立なものの最大本数である.

【証明】第 4 章 No.4 定理 6 と No.2 定理 4 (2) から. (次元定理を使うと: $\dim \text{Ker } f_A = n - \text{rank } A$ (第 4 章 No.4 定理 5) なので $\dim \text{Im } f_A = n - (n - \text{rank } A) = \text{rank } A$.) $\square$

ランクは「簡約階段行列の零行でない行の数」として定義したので, もともと行の側から見た量だった. 第 1 章 No.5 のコラムで予告した「行から見ても列から見ても同じ」ことをここで示そう.

定理 4 $\text{rank } {}^tA = \text{rank } A$

A の行ベクトルで生成される部分空間の次元も $\text{rank } A$ に等しい. したがって $\text{rank } {}^tA = \text{rank } A$.

【証明】 A の行ベクトルが生成する空間 (行空間) を $R(A)$ と書く.

行基本変形で $R(A)$ は変わらない: 変形後の各行は元の行の 1 次結合なので $R(\text{変形後}) \subset R(A)$. 行基本変形は逆向きの変形で元に戻せるので, 逆の包含も成り立つ.

よって $R(A)$ は, 簡約階段行列 R の行空間に等しい. R の零行でない行 ($\text{rank } A$ 本) は, 主成分の位置を見ると 1 次独立である (第 i 行の主成分の列では, 他の行の成分はすべて 0). したがって $\dim R(A) = \text{rank } A$.

${}^tA$ の列は A の行 (を縦にしたもの) なので, 定理 3 より $\text{rank } {}^tA = \dim R(A) = \text{rank } A$. $\square$

注意

$m \times n$ 行列 A について, 次の量はすべて等しい.

- 簡約階段行列の零行でない行の数 (定義)
- 1 次独立な列ベクトルの最大本数 $= \dim \text{Im } f_A$
- 1 次独立な行ベクトルの最大本数
- $n - \dim \text{Ker } f_A$

ランクは, 1 つの量をいろいろな角度から見たものである.

■ 4. 同型

定義 1 同型写像

全単射な線形写像 $f: V \rightarrow W$ を同型写像という. V から W への同型写像が存在するとき, V と W は同型であるといい, $V \cong W$ と書く.

定理 5

$f: V \rightarrow W$ が同型写像なら, 逆写像 $f^{-1}: W \rightarrow V$ も線形写像 (同型写像) である.

【証明】 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W$ に対し $\mathbf{x}_i = f^{-1}(\mathbf{y}_i)$ とおくと $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ なので $f^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f^{-1}(\mathbf{y}_1) + f^{-1}(\mathbf{y}_2)$. スカラー倍も同様. $\square$

定理 6 座標写像

$(v_1, \dots, v_n)$ を V の基底とすると、ベクトルにその座標を対応させる写像

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \mapsto {}^t(x_1, \dots, x_n)$$

は同型写像である．特に $\dim V = n$ なら $V \cong \mathbb{R}^n$ ．

【証明】 線形性は座標の足し算・定数倍から明らか． $\varphi(x) = \mathbf{0}$ なら $x = 0v_1 + \dots + 0v_n = \mathbf{0}$ で単射． $\dim V = \dim \mathbb{R}^n$ なので定理 2 (4) より全単射． $\square$

定理 7

有限次元のベクトル空間 V, W について、 $V \cong W \iff \dim V = \dim W$ ．

【証明】 $(\Rightarrow)$ 同型写像 f について $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$, $\text{Im } f = W$ なので、次元定理より $\dim V = 0 + \dim W$ ．
 $(\Leftarrow)$ $\dim V = \dim W = n$ なら、定理 6 より $V \cong \mathbb{R}^n \cong W$ (同型写像の逆や合成も同型写像)． $\square$

コラム：同型とは「見た目が違うだけで同じ」

たとえば $\mathbb{R}[x]_3$, $M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^4$ はどれも 4 次元なので互いに同型である．

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow {}^t(a, b, c, d)$$

この対応で和もスカラー倍もそのまま移るので、ベクトル空間として（和とスカラー倍だけを見る限り）区別がつかない．有限次元のベクトル空間は、**次元だけで完全に分類される**．第 4 章 No.2 で多項式の 1 次独立性を係数ベクトルで調べられたのは、この同型（座標写像）のおかげである．

■ 練習問題

- 線形写像 $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が全射であるとき、 $\dim \text{Ker } f$ を求めよ．
- 次のような線形写像は存在するか．理由とともに答えよ．
 - 単射な線形写像 $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 - 全射な線形写像 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 - $\text{Ker } f = \text{Im } f$ となる線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- $n \geq 1$ とする．微分 $D: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ について、次元定理が成り立っていることを確かめよ．
- A を $m \times n$ 行列とする．次を示せ．
 - f_A が単射 $\iff \text{rank } A = n$ ．
 - f_A が全射 $\iff \text{rank } A = m$ ．
- A を $l \times m$ 行列、 B を $m \times n$ 行列とする． $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A$ かつ $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } B$ を示せ．
 (ヒント： $\text{Im } f_{AB} \subset \text{Im } f_A$ ．また $\text{Im } f_{AB} = f_A(\text{Im } f_B)$ に次元定理を使う．)
- (考えてみよう) $\mathbb{R}[x]_3$ と $M_{2,2}(\mathbb{R})$ の間の同型写像を 1 つ作れ．また、 $\mathbb{R}[x]_2$ と $M_{2,2}(\mathbb{R})$ は同型でないことを示せ．

■ 練習問題の解答

1. 全射なので $\dim \operatorname{Im} f = 3$. 次元定理より $\dim \operatorname{Ker} f = 5 - 3 = 2$.
2. (1) 存在しない. $\dim \mathbb{R}^4 > \dim \mathbb{R}^3$ (定理 2 (3)). (2) 存在しない. $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$. (3) 存在しない. $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = k$ なら次元定理より $2k = 3$ で, k が整数にならない.
3. $\operatorname{Ker} D = \langle 1 \rangle$ (次元 1), $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}[x]_{n-1}$ (次元 n). $1 + n = n + 1 = \dim \mathbb{R}[x]_n$.
4. (1) 単射 $\iff \dim \operatorname{Ker} f_A = 0 \iff n - \operatorname{rank} A = 0$ (第4章 No.4 定理 5). (2) 全射 $\iff \dim \operatorname{Im} f_A = m \iff \operatorname{rank} A = m$ (定理 3).
5. $f_{AB} = f_A \circ f_B$ なので, $\operatorname{Im} f_{AB} = f_A(\operatorname{Im} f_B) \subset \operatorname{Im} f_A$. よって $\operatorname{rank}(AB) = \dim \operatorname{Im} f_{AB} \leq \dim \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A$. また, f_A を部分空間 $\operatorname{Im} f_B$ に制限した線形写像 $\operatorname{Im} f_B \rightarrow \mathbb{R}^l$ に次元定理を使うと, その像 $f_A(\operatorname{Im} f_B)$ の次元は $\dim \operatorname{Im} f_B = \operatorname{rank} B$ 以下. よって $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} B$.
6. 例えば $a + bx + cx^2 + dx^3 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 線形で, $\mathbf{0}$ に移るのは 0 だけなので単射, 次元が等しいので全単射. $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3 \neq 4 = \dim M_{2,2}(\mathbb{R})$ なので, 定理 7 より同型でない.